

УДК 621.98:512.55 (076)

О.А. ТУЗЕНКО, канд. техн. наук, доц., ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет", Мариуполь,
В.В. КУХАРЬ, канд. техн. наук, доц., ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет", Мариуполь,
Е.Ю. БАЛАЛАЕВА, канд. техн. наук, ст. преп., ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет", Мариуполь,
А.В. ДУБИНИНА, старший инженер-программист, ОАО "Азовсталь", Мариуполь

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА МЕТОДОМ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Разработана методика и программное обеспечение для проведения сравнительного анализа математических моделей процессов или явлений, полученных методами полного и факторного экспериментов. В результате получено, что оптимальными критериями адекватности математических моделей являются критерии Фишера и Манна-Уитни. Ил.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: планирование эксперимента, сравнительный анализ, полный и факторный эксперимент, программное обеспечение.

Постановка проблемы. В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем при проведении экспериментальных исследований является проблема извлечения максимального количества полезной информации об исследуемом явлении или процессе при минимальных затратах. При недостаточном знании механизмов протекания процессов целесообразно построение математических моделей с использованием метода планирования эксперимента. В связи с тем, что при решении различных производственных задач не всегда существует возможность выполнять достаточное количество требуемых экспериментов, возникает необходимость проведения сравнительного анализа с целью выявления наиболее рационального метода для построения математических моделей, адекватно описывающих соответствующие процессы или явления.

Анализ литературы. Перед исследователем, выбравшим для построения математической модели метод планирования эксперимента, часто возникает необходимость выбора между получением отдельных и независимых оценок коэффициентов математической модели, которые обеспечивает полный факторный эксперимент (ПФЭ), и снижением

затрат с помощью сокращения количества опытов, которое позволяет дробный факторный эксперимент (ДФЭ). Однако необходимо учитывать, что сокращение числа опытов не позволяет оценить раздельно эффекты факторов и эффекты взаимодействия, что приводит к смешанным оценкам [1], для их выявления необходимо использовать генерирующие соотношения и определяющие контрасты [1, 2]. Анализ литературных источников показал, что выбор метода планирования эксперимента для построения математической модели исследуемого процесса в основном осуществляется интуитивно и основан только на личном опыте исследователей [3]. Например, авторы [4], основываясь на схеме планирования ДФЭ для 4 уровней по методу Д. Финни [5], предлагают осуществлять построение ортогональной матрицы планирования на 3 – 5 уровнях. Построение плана эксперимента основывают также на латинском квадрате [6], однако такой подход не дает возможности оценить взаимодействие между факторами. В химической промышленности часто используют насыщенные симплекс-решетчатые планы [7, 8], однако они содержат минимально возможное число экспериментальных точек, поэтому требуют дополнительных точек для оценки адекватности. Поскольку затруднительно выявить, с помощью какого метода лучше проводить построение математических моделей того или иного процесса или явления, в данной работе проводится сравнительный анализ математических моделей, полученных методами полного и дробного факторного эксперимента, основанных на планах первого порядка. С помощью данных методов возможно построение простой линейной модели или полиномиальной модели (модели с учетом взаимодействия факторов) [9 – 11].

Цель статьи – построение математических моделей с помощью методов полного факторного эксперимента и дробного факторного эксперимента, проведение сравнительного анализа полученных моделей для выявления наиболее целесообразного метода математического моделирования с помощью механизмов планирования эксперимента для конкретного процесса, а также создание программного обеспечения, позволяющего производить математическое моделирование методами полного и дробного факторного эксперимента и осуществлять сравнительный анализ математических моделей, полученных различными методами планирования эксперимента.

Построение математических моделей. В общем виде линейная модель может быть представлена следующим образом:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i, \quad (1)$$

где Y – функция отклика или исследуемый параметр; b_j , $j = \overline{0, n}$ – коэффициенты уравнения регрессии; x_i – значение i -го фактора в безразмерной системе координат; n – количество факторов, влияющих на исследуемый параметр.

Полиномиальная модель может быть представлена следующим образом:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i < j < \dots < n} b_{ij\dots n} x_i \cdot x_j \cdot \dots \cdot x_n, \quad (2)$$

где $b_0, b_i, b_{i,j,\dots,n}$ – коэффициенты уравнения регрессии.

Проведение сравнительного анализа. Сравнительный анализ состоит в применении того или иного статистического критерия – Q-критерия Розенбаума, W-критерия Вилкоксона, Фишера или Манна-Уитни [10, 11]. Наиболее мощными критериями, которые позволяют точно определить различия даже между выборками малого объема, являются критерии Фишера и Манна-Уитни [10, 11]. F-критерий Фишера – статистический параметрический критерий, который используется для сравнения параметров двух выборок. Поскольку основными параметрами модели являются дисперсия коэффициентов, дисперсия адекватности математической модели, а также дисперсия воспроизводимости исследуемого процесса именно эти параметры и были выбраны для проведения сравнительного анализа моделей по критерию Фишера. Для применения критерия Фишера необходимо вычислить дисперсии коэффициентов, адекватности и воспроизводимости для математических моделей, полученных методами ПФЭ и ДФЭ, а затем для каждого вида дисперсий произвести вычисление расчетного значения критерия по формуле:

$$F_{ras} = \frac{\sigma_{min}^2}{\sigma_{max}^2}, \quad (3)$$

где F_{ras} – расчетное значение критерия Фишера; σ_{min}^2 – минимальная дисперсия; σ_{max}^2 – максимальная дисперсия.

Для того чтобы определить, существует ли различие между рассматриваемыми дисперсиями, необходимо сравнить расчетное значение с табличным. Если расчетное значение превышает табличное или равно ему, то можно сделать вывод, что различия между дисперсиями, а, следовательно, и между выборками, существенны. Это означает, что можно сделать вывод о преимуществах какого-либо из методов планирования эксперимента над другим. Табличное значение критерия Фишера вычисляется по формуле:

$$F_{\text{tabl}} = F_{\text{tabl}}(n_1', n_2'), \quad (4)$$

где F_{tabl} – табличное значение критерия Фишера; n_1', n_2' – степени свободы для дисперсий.

U-критерий Манна-Уитни – непараметрический статистический критерий, используемый для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между ранжированным рядом значений параметра в первой выборке и таким же рядом во второй выборке. При этом, чем меньше будет получено значение критерия, тем вероятнее, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Для применения U-критерия Манна-Уитни нужно определить значение U-критерия Манна-Уитни по формуле:

$$U = n_1 \cdot n_2 + 0,5 \cdot n_x \cdot (n_x + 1) - T_x, \quad (5)$$

где U – расчетное значение критерия Манна-Уитни; n_1 – число элементов в первой выборке; n_2 – число элементов во второй выборке; n_x – число элементов в выборке с большей суммой рангов; T_x – большая сумма рангов, и по таблице для избранного уровня статистической значимости определить критическое значение критерия для данных по числу элементов в каждой из выборок.

Если расчетное значение критерия меньше табличного или равно ему, то признается наличие существенного различия между уровнем признака в рассматриваемых выборках, иначе принимается гипотеза об отсутствии существенных различий между данными выборками. Достоверность тем выше, чем меньше расчетное значение критерия.

Разработка программного обеспечения. Поскольку разработка программного обеспечения для построения математических моделей исследуемых процессов значительно сокращает время на проведение экспериментальных исследований, а также, исходя из всего, указанного

выше, необходимость создания программного продукта, способного строить математические модели планирования эксперимента и проводить их сравнительный анализ, очевидна. В связи с этим было разработано программное обеспечение.

Программа позволяет осуществлять ввод и редактирование начальных условий и результатов эксперимента, производить вычисление всех этапов планирования эксперимента, проверку процесса на воспроизводимость, вычисление и определение значимости коэффициентов регрессии, построение и оценку адекватности математической модели.

После построения математических моделей по одинаковым исходным данным с помощью ПФЭ и ДФЭ в разработанном программном обеспечении предусмотрена возможность проведения сравнительного анализа по критериям Манна-Уитни и Фишера. Таким образом, результатами работы программы являются математические модели процессов или явлений, содержащие данные о факторах в кодированном виде и в натуральном масштабе, выводы об адекватности полученных моделей, а результатами проведения сравнительного анализа являются выводы о превосходстве метода ПФЭ или ДФЭ для конкретного процесса. Также предусмотрена возможность вывода на печать результатов моделирования и сравнительного анализа, а также графическая интерпретация полученных результатов.

В качестве экспериментальных данных для математического моделирования были выбраны данные по процессу кузнечной осадки выпуклыми продолговатыми плитами. На основании результатов проведения предварительных экспериментов производилось построение математических моделей методами ПФЭ 2^5 , ДФЭ 2^{5-1} и ДФЭ 2^{5-2} . С целью выявления наиболее рационального метода планирования реального эксперимента для математических моделей, полученных различными методами на основании одинаковых исходных данных, был проведен сравнительный анализ по критериям Манна-Уитни и Фишера, а также были построены сводные графики для ПФЭ и ДФЭ, которые демонстрировали отличия математических моделей ПФЭ и ДФЭ. На основании результатов сравнительного анализа, было сделано заключение, что наиболее оптимальным методом для построения математических моделей процесса формоизменения заготовок при кузнечной осадке выпуклыми плитами является дробный факторный эксперимент 2^{5-1} . Это заключение основано на том, что коэффициенты моделей, полученных данным методом, отличаются от моделей, полученных методом ПФЭ, только в сотых долях. Помимо этого,

сравнительный анализ по критерию Фишера и Манна-Уитни не показал существенных различий между методами ПФЭ и ДФЭ. К тому же, дробный факторный эксперимент 2^{5-1} позволяет сократить количество опытов в два раза по сравнению с ПФЭ и, в отличие от ДФЭ 2^{5-2} , не приводит к потере значимых факторов и их взаимодействий.

Выводы. Таким образом, разработана методика сравнительного анализа математических моделей и универсальное программное обеспечение, позволяющее проводить построение и оценку адекватности математических моделей с помощью полного и дробного факторных экспериментов, а также осуществлять их сравнительный анализ по критериям Фишера и Манна-Уитни. Разработанная методика позволяет определить оптимальный метод математического моделирования конкретного процесса или явления, произвести минимизацию количества опытов, необходимых для построения математической модели, не приводящую к потерям значимых факторов и их взаимодействий.

Список литературы: 1. Бондарь А.Г. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии / А.Г. Бондарь, Г.А. Статюха, И.А. Потяженко. – К.: Вища школа, 1980. – 264 с. 2. Боровиков С.М. Математические методы в конструировании и технологии радиоэлектронных средств / С.М. Боровиков. – Минск: БГУИР, 2009. – 101 с. 3. Жирабок А.Н. Планирование эксперимента для построения математических моделей / А.Н. Жирабок // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Том 7. – № 9. – С. 121–127. 4. Неизвестная С.В. Планирование эксперимента для исследования процесса синтеза блочных изделий на основе нанопериодических силикатных и алюмосиликатных материалов / С.В. Неизвестная, А.А. Ермаков // Вопросы современной науки и практики. – Севастополь: ТНУ им. В.И. Вернадского. – 2011. – № 2 (33). – С. 401 – 406. 5. Яворский В.А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных / В.А. Яворский. – Долгопрудный: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та (гос. ун-т), 2006. – 24 с. 6. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. / Ред. совет: В.С. Авдеевский (пред.) и др. – М.: Машиностроение, 1986. – Т. 6: Экспериментальная отработка и испытания / Под ред. Р.С. Судакова, О.И. Тескина. – 1989. – 375 с. 7. Казова Р.А. Исследование взаимодействия в системе $\text{Ca}_{10}[\text{PO}_4]_6\text{F}_2 - \text{SiO}_2 - \text{CaMg}(\text{CO}_3)_2 - \text{KAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2$ методом симплекс-решетчатого планирования / Р.А. Казова // Изв. АН КазССР. – 1990. – № 1. – С. 3–7. 8. Трепов И.В. Селективное применение аспарагиновой кислоты и глутамин в экстрактах на основе гидрофильных растворителей / И.В. Трепов, О.А. Пахомова, С.И. Нифталиев, Я.И. Коренман // Проблемы теоретической и экспериментальной химии. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. – С. 49 – 50. 9. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента / Перевод с англ. под ред. Э.К. Лейко. – М.: Мир, 1981. – 520 с. 10. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии / Е.В. Сидоренко. – СПб.: Речь, 2004. – 350 с. 11. Холлендер М. Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д.А. Вулф. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 518 с.

Поступила в редакцию 30.06.2012

После доработки 27.06.2013

Статью представил д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. информатики ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет" Гранкин В.П.

УДК 621.98:512.55 (076)

Дослідження математичних моделей у плануванні експерименту методом порівняльного аналізу / Тузенко О.О., Кухар В.В., Балаласва О.Ю., Дубиніна А.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 39 (1012). – С. 182 – 188.

Розроблена методика і програмне забезпечення для проведення порівняльного аналізу математичних моделей процесів або явищ, отриманих методами повного або дрібного факторних експериментів. У результаті найбільш оптимальними критеріями адекватності математичних моделей є критерії Фішера и Манна-Уїтні. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: планування експерименту, порівняльний аналіз, повний і дрібний факторний експеримент, програмне забезпечення.

UDC 621.98:512.55 (076)

Research of mathematical models in design of experiments by the method of comparative analysis / Tuzenko O.A., Kukhar V.V., Balalayeva E.Yu., Dubinina A.V. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2013. – № 39 (1012). – P. 182 – 188.

The method and soft for realization of comparative analysis of mathematical models of processes and effects, which were received by methods of complete factorial and fractional factorial experiments, are developed. In result the most optimal goodness of fit of mathematical models are Fisher's and Munn-Whitney criterion. Refs.: 11 titles.

Keywords: design of experiments, comparative analysis, complete and fractional factorial experiment, soft.